

Reg. No. :

Code No. : 20580 B Sub. Code : SMMA 63

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, APRIL 2021.

Sixth Semester

Mathematics — Core

GRAPH THEORY

(For those who joined in July 2017 onwards)

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

PART A — ($10 \times 1 = 10$ marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer.

1. ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட உறுப்பினர்கள் கொண்ட ஒரு கூட்டத்தில், சமமான நண்பர்களையுடைய உறுப்பினர்களின் எண்ணிக்கை
- (அ) 3 (ஆ) 2
(இ) 4 (ஈ) 5

In any group of more than one people, the number of people having the same number of friends inside the group is

- (a) 3 (b) 2
(c) 4 (d) 5

2. '6' புள்ளிகளைக் கொண்ட ஒரு வரைபின் இணையா புள்ளி எண் 2 எனில் அதன் தொடுபுள்ளி எண் _____.

(அ) 4 (ஆ) 2

(இ) 6 (ஈ) 3

For a graph with 6 points, the independence number is 2. Then the covering number is _____.

(a) 4 (b) 2

(c) 6 (d) 3

3. C_8 -ன் சிறுசுற்றின் அளவு

(அ) 2 (ஆ) 4

(இ) 6 (ஈ) 8

Girth of C_8 is

(a) 2 (b) 4

(c) 6 (d) 8

4. G ஒரு தொடுத்த வரைபு எனில் $w(G) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(அ) 0

(ஆ) 2

(இ) 1

(ஈ) கோடுகளின் எண்ணிக்கை

If G is a connected graph then $w(G) =$ _____.

- (a) 0 (b) 2
(c) 1 (d) number of edges

5. 10 புள்ளிகள் கொண்ட ஒரு மரத்தின் கோடுகளின் எண்ணிக்கை

- (அ) 10 (ஆ) 11
(இ) 9 (ஈ) 5

Number of edges of a tree of order 10 is

- (a) 10 (b) 11
(c) 9 (d) 5

6. எந்த தேற்றம் டிரக்கின் தேற்றத்தை விட வலிமைமிக்கது?

- (அ) கெய்லே தேற்றம் (ஆ) ஆயிலரின் தேற்றம்
(இ) ஹாமில்டன் தேற்றம் (ஈ) சவ்டால் தேற்றம்

Which theorem is stronger than Dirac's theorem?

- (a) Cayley theorem
(b) Euler's theorem
(c) Hamilton's theorem
(d) Chvatal's theorem

7. r முகங்கள் கொண்ட எந்தவொரு (p, q) தொடுத்த தளவரையின் குறைந்தபட்ச கோடுகளின் எண்ணிக்கை

(அ) $\frac{3r}{2}$ (ஆ) $\frac{2r}{3}$
(இ) $3p + 6$ (ஈ) $p - 1$

In any connected plane (p, q) graph with r faces, the minimum number of edges is

(a) $\frac{3r}{2}$ (b) $\frac{2r}{3}$
(c) $3p + 6$ (d) $p - 1$

8. குறைந்த பட்சம் 2 புள்ளிகளைக் கொண்ட மரம் T -ன் வண்ண எண்

(அ) 1 (ஆ) 2
(இ) 0 (ஈ) 3

The chromatic number of a tree T with atleast 2 points is

(a) 1 (b) 2
(c) 0 (d) 3

9. G ஒரு (p, q) வரைபு மற்றும் $f(G, \lambda) = \lambda^r + s\lambda^{r-1} + \dots$ எனில் r, s முறையே

(அ) p, q (ஆ) q, p
(இ) $q, -p$ (ஈ) $p, -q$

If G is a (p, q) graph and $f(G, \lambda) = \lambda^r + s\lambda^{r-1} + \dots$
then r, s are respectively

- (a) p, q (b) q, p
(c) $q, -p$ (d) $p, -q$

10. ஒரு திசைவரைபில்

- (அ) $\Sigma d^+(v) = \Sigma d^-(v) = q$ (ஆ) $\Sigma d^+(v) = 2q$
(இ) $\Sigma d^-(v) = 2q$ (ஈ) இவை ஏதுமில்லை

In a digraph,

- (a) $\Sigma d^+(v) = \Sigma d^-(v) = q$ (b) $\Sigma d^+(v) = 2q$
(c) $\Sigma d^-(v) = 2q$ (d) None of these

PART B — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) ஓரின சார்பு புள்ளிகளின் படியை பாதுகாக்கும்
என நிறுவுக.

Prove that isomorphism preserves the degree
of vertices.

Or

(ஆ) ஒவ்வொரு வரைபும் வெட்டும் வரைபு என நிரூபி.

Prove that every graph is an intersection graph.

12. (அ) $P = (6, 6, 5, 4, 3, 3, 1)$ என்ற படித் தொடர் வரைபு தொடர் அல்ல என காட்டுக.

Show that the partition $P = (6, 6, 5, 4, 3, 3, 1)$ is not graphical.

Or

(ஆ) எந்த ஒரு $u-v$ நடையும் ஒரு $u-v$ பாதையைக் கொண்டிருக்கும் என நிரூபி.

Show that any $u-v$ walk contains a $u-v$ path.

13. (அ) வரைபு G -ன் ஒரு முனைப்புள்ளிக்கும் படி குறைந்த பட்சம் இரண்டு எனில் அந்த வரைபு ஒரு சுற்றை உள் அடக்கியிருக்கும் என காட்டுக.

If G is a graph in which the degree of every vertex is atleast two then show that G contains a cycle.

Or

(ஆ) ஒரு மரத்தில் எந்த இரு புள்ளிகளுக்கு இடையேயும் ஒரே ஒரு பாதை இருக்கும் என நிரூபி.

Prove that in a tree, between any two points there is a unique path.

14. (அ) ஒவ்வொரு பன்முகத்திற்கும் குறைந்த பட்சம் இரண்டு முகங்கள் ஒரே எண்ணிக்கையிலான கோடுகளை எல்லையில் கொண்டிருக்கும் என நிரூபி.

Prove that every polyhedron has atleast two faces with the same number of edges on the boundary.

Or

(ஆ) ஆயிலரின் பன்முக சூத்திரத்தை கூறி நிறுவுக.

State and prove Euler's polyhedron formula.

15. (அ) வரையறு :

- (i) திசை நடை
- (ii) படி ஜோடி
- (iii) திசை வரைபு.

Define :

- (i) Directed walk
- (ii) Degree pair
- (iii) Digraph.

Or

(ஆ) $\lambda^4 - 3\lambda^3 + 3\lambda^2$ என்பது எந்தவொரு வரைபிற்கும் வண்ண பல்லுறுப்புக் கோவையாக இருக்க முடியாது எனக் காட்டுக.

Show that $\lambda^4 - 3\lambda^3 + 3\lambda^2$ cannot be the chromatic polynomial of any graph.

PART C — ($5 \times 8 = 40$ marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) G_1 ஒரு (p_1, q_1) வரைபு மற்றும் G_2 ஒரு (p_2, q_2) வரைபு எனில் $G_1 + G_2$ என்பது $(p_1 + p_2, q_1 + q_2 + p_1p_2)$ வரைபு மற்றும் $G_1 \times G_2$ என்பது $(p_1p_2, q_1p_2 + p_2q_1)$ வரைபு என நிரூபி.

If G_1 is a (p_1, q_1) and G_2 is a (p_2, q_2) graph then prove that $G_1 + G_2$ is a $(p_1 + p_2, q_1 + q_2 + p_1p_2)$ graph and $G_1 \times G_2$ is a $(p_1p_2, q_1p_2 + p_2q_1)$ graph.

Or

(ஆ) p -புள்ளிகளையுடையதும் முக்கோணங்கள் இல்லாததுமான வரைபுகளில், மீப்பெரு

கோடுகளின் எண்ணிக்கை $\left\lfloor \frac{p^2}{4} \right\rfloor$ என நிரூபி.

Prove that the maximum number of lines among all p -point graphs with no triangles is

$$\left\lfloor \frac{p^2}{4} \right\rfloor.$$

17. (அ) ஓர் இரட்டைப்படை எண்ணை $p-1 \geq d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_p$ என்றிருக்குமாறு p பகுதிகளாகப் பிரித்த $P = (d_1, d_2, \dots, d_p)$ எனும் பிரிப்பு ஒரு வரைபு பிரிப்பாக இருக்க தேவையானதும் போதுமான நிபந்தனை என்னவெனில்

$$P^1 = \left(d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, \frac{d-1}{d_1+1}, \dots, d_p \right) \quad \text{எனும்}$$

பிரிப்பு வரைபு பிரிப்பாக இருக்கவேண்டும் என நிரூபி.

Prove that a partition $P = (d_1, d_2, \dots, d_p)$ of even number into p parts with $p-1 \geq d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_p$ is graphical iff the modified partition

$$P^1 = \left(d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, \frac{d-1}{d_1+1}, \dots, d_p \right) \quad \text{is}$$

graphical.

Or

(ஆ) குறைந்த பட்சம் இரு புள்ளிகளையுடைய வரைபு G ஒரு இருகூறு வரைபாக இருக்க தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை என்னவெனில் அதன் அனைத்து சுற்றுகளும் இரட்டைப்படை நீளத்தில் இருக்கும் என நிறுவுக.

Prove that a graph G with atleast two points is bipartite iff all its cycles are of even length.

18. (அ) பீட்டர்சன் வரைபு ஒரு ஹேமில்டோனியன் வரைபு அல்ல என நிறுவுக.

Show that the Petersen graph is non-hamiltonian.

Or

(ஆ) ஒரு தொடுத்த வரைபு G -யில் கீழே உள்ளவை ஒன்றுக்கொன்று சமமானமானவை என நிரூபி :

- (i) G ஒரு ஆயிலேரியன் வரைபு.
- (ii) G -ன் ஒவ்வொரு புள்ளியும் இரட்டைப்படை படியுடையது.
- (iii) G -ன் கோடுகளின் கணம் சுற்றுகளாக பிரிக்கப்படக்கூடியது.

Prove that the following statements are equivalent for a connected graph G .

- (i) G is Eulerian.
- (ii) Every point of G has even degree.
- (iii) The set of edges of G can be partitioned into cycles.

19. (அ) (i) K_5 மற்றும் $K_{3,3}$ ஆகிய வரைபுகள் தளவரைபுகள் அல்ல என நிறுவுக.

(ii) G ஒரு முக்கோணங்கள் இல்லாத தொடுத்த (p, q) தளவரைபு மற்றும் $p \geq 3$ எனில் $q \leq 2p - 4$ என நிரூபி.

(i) Prove that the graphs K_5 and $K_{3,3}$ are not planar.

(ii) If G is a plane connected (p, q) graph without triangles and $p \geq 3$ then prove that $q \leq 2p - 4$.

Or

(ஆ) $\chi'(K_n) = \begin{cases} n; & n \text{ ஒரு ஒற்றைப்படை எண்} (n \neq 1) \\ n-1; & n \text{ ஒரு இரட்டைப்படை எண்} \end{cases}$ என நிரூபி.

Prove that $\chi'(K_n) = \begin{cases} n & \text{if } n \text{ is odd } (n \neq 1) \\ n-1 & \text{if } n \text{ is even} \end{cases}$.

20. (அ) $f(G, \lambda)$ -ன் குணகங்களின் குறியீடு மாறி மாறி அமையும் என நிரூபி. மேலும் G ஒரு (p, q) வரைபு எனில் λ^{p-1} -ன் குணகம் $-q$ என நிரூபி.

Prove that the coefficients of $f(G, \lambda)$ are alternate in sign. Also prove that if G is a (p, q) graph then the coefficient of λ^{p-1} is $-q$.

Or

- (ஆ) ஒரு வலுவற்ற திசை வரைபு D ஆயிலீரியன் திசைவரைபாக இருக்கத் தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனை என்னவெனில் ஒவ்வொரு புள்ளியின் அகப்படியும் புறப்படியும் சமம் என நிறுவுக.

Prove that a weak diagraph D is Eulerian iff every point of D has equal in-degree and out-degree.